ATENEO MATEMÁTICO : EL TRABAJO DE MODELIZACIÓN EN EL ÁMBITO DE LAS FUNCIONES

Docente: Ferrari, María Florencia

DNI: 35354307

Mail: florenciaferrari91@gmail.com

Lanzamiento de la pelota.

Tiempo estimado

Un módulo de 80 minutos

Curso

4° Turno Mañana y Tarde Ciclo Orientado.

Colegio

Colegio Secundario de Toay.

Conocimientos previos: Concepto de función y función lineal, raíces, ordenada al origen, intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Introducción

En esta primera instancia se propuso trabajar el concepto de función cuadrática con una situación problemática cómo también, se abordaron formas de representar gráficamente esta función a partir de los puntos notables.

Objetivos

Se espera que los alumnos puedan interpretar algunas de las características de la función cuadrática a partir de la resolución de una situación problema.

Recursos

Televisor, netbook

Actividad de apertura

Los alumnos observaron un video donde se tira una pelota verticalmente hacia arriba y luego respondieron con el compañero de banco una serie de preguntas. Link del video: https://youtu.be/7Uzc9T79TCM
Se dispuso de observar el video en televisor grande y netbooks para todos los alumnos.

La consigna de trabajo fue:

Luego de observar el video contesten:

a) i. ¿A qué altura está la pelotita a los 0,5s?
ii. ¿Existe otro instante en el que está a la misma altura?

b) ¿A qué altura está la pelotita a los 1,9s? ¿Existe otro instante en el que está a la misma altura?

c) ¿Alcanza la pelotita los 5m de altura? ¿En qué momento?

d) ¿Alcanza la pelotita los 7m de altura? ¿En qué momento?

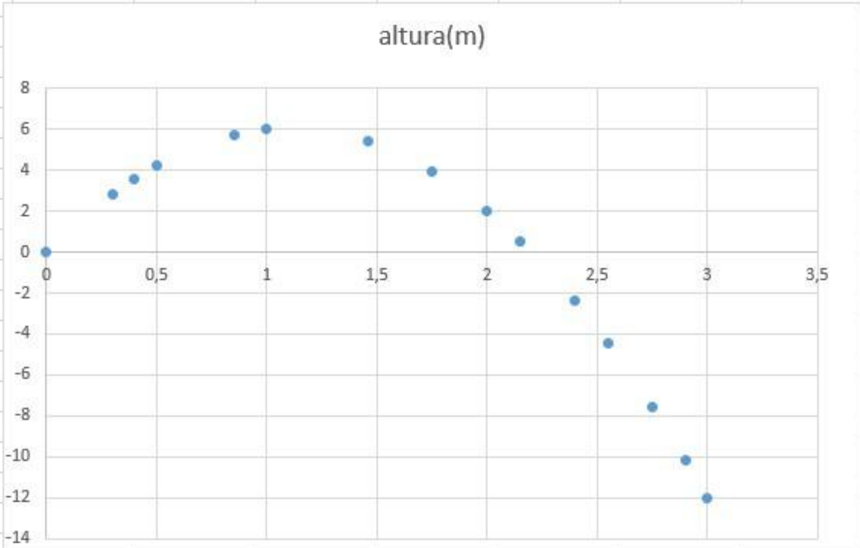
e) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelotita? ¿En qué instante?

Anticipaciones:

Previo a la clase fue necesario verificar si todas las netbooks tienen el software Geo-Gebra instalado, si están cargadas y ver cuantas computadoras dispone la institución. También es necesario conocer si los alumnos saben usar Word (ya que las preguntas van a estar en formato digital), Excel y Geo-Gebra.

Registraron los datos en el Software Excel y analizaremos el gráfico.

	A	B
3	3	-12
4	1	6
5	2,4	-2,4
6	2,55	-4,46
7	2,9	-10,15
8	0	0
9	0,3	2,85
10	0,4	3,6
11	0,85	5,74
12	1,46	5,44
13	1,75	3,94
14	2	2
15	2,15	0,54
16	2,75	-7,56



Intervenciones: En los casos, en los que fue necesario, se orientó a los estudiantes para cargar los datos en el Excel y luego poder hacer el gráfico de dispersión.

Aquí tiene una fuerte presencia, el registro grafico ya que a partir del mismo, pudieron responder las preguntas, no así el marco funcional, ya que con los datos de la tabla (lugar donde cargamos los datos en el Excel, o si lo anotaron en un papel) no les alcanzaba para poder responder todas las consignas.

En esta instancia los chicos trabajaran con el compañero de banco, pero cada uno en su computadora aunque las conclusiones fueron producidas grupalmente.

Una vez que todos los alumnos contestaron las preguntas se realizó la puesta en común para analizar las respuestas con el fin de entender el comportamiento del lanzamiento de la pelota.

Cada pregunta generó debate, ya que no todos coincidieron en la misma respuesta, debido a que las consignas las respondieron mirando un gráfico y tomando datos aproximados.

En el apartado a) ii) se intervino con preguntas como: ¿qué significa que pueda existir otro instante a la misma altura? Observando los datos registrados en el papel (antes de cargarlo en Excel) se pudo observar si existe otro momento.

Mirando el gráfico los estudiantes analizaron el significado de cada eje, que valores son los que se toma y por qué.

En el eje “x” se encuentra el tiempo en segundos y en el eje “y” la altura alcanzada por la pelota en metros. Como pudieron ver, a los 0,5 segundos alcanza una altura aproximada de 4 metros, si trazamos una línea “imaginaria”, paralela al eje x que pasa por 4 (del eje y) observaron que vuelve a tomar ese valor, aproximadamente a 1,75 segundos.

Respuestas de algunos estudiantes:

Estudiante 1: Alcanza los 4m, a los 1,7 segundos aproximadamente.

Estudiante 2: Está a 4,25 m entre 1,6 y 1,8 segundos.

Estudiante 3: Está a una altura de 4,25 metros, en 1,7 segundos aproximadamente.

En esta actividad b) sucede lo mismo que la anterior pregunta. Los estudiantes responden:
E1: A los 3 m, a los 0,3 segundos aproximadamente.

E 2: Se encuentra a los 3,24 m, a 0,35 segundos aproximadamente.

Para el inciso d) surgieron:

E 1: Si en 0,7 m aproximadamente y en 1,6 segundos.
E2: Si los alcanza entre 4,25 s y 5,74 s.
E 3: SI los alcanza en el minuto 1,3 segundos.

Respecto del inciso e) la búsqueda de la altura máxima es más “fácil” de observar, tanto en el gráfico como en el video, pero donde pueden tener dudas los chicos es buscando el instante, como no hay muchos puntos marcados en el gráfico, vamos a trazar una línea “Imaginaria” paralela al eje de las ordenadas, que pase por el punto que creemos que es el más alto. Pudieron observar aproximadamente que dicho punto se da en el instante 1,25 segundos. Tenemos que considerar además que las respuestas de algunas de las preguntas no se pueden responder con exactitud, ya que depende de los datos que se tomen.

E1: En 6,1.

E 2: La altura máxima son 6,05m. La alcanza en 1,15 segundos.

E3: Creen que fue de 6,5 metros en el instante 1,1 segundos.

Otras intervenciones: Si la pelotita está a cierta altura, ¿siempre hay dos momentos distintos en los cuales se alcanza dicha altura? ¿Qué relación hay entre estos dos momentos y el instante en el cual se alcanza la altura máxima? ¿Qué característica tiene la función? ¿Si doblamos la hoja al medio obtenemos lo mismo en los dos lados?

E1: Podemos ver que puede tomar dos valores ya que es una curva. La función es una curva. La relación es de los metros alcanzados de la pelotita y el tiempo que tarda en caer. Queda lo mismo en los dos lados, si doblo la hoja a la mitad.

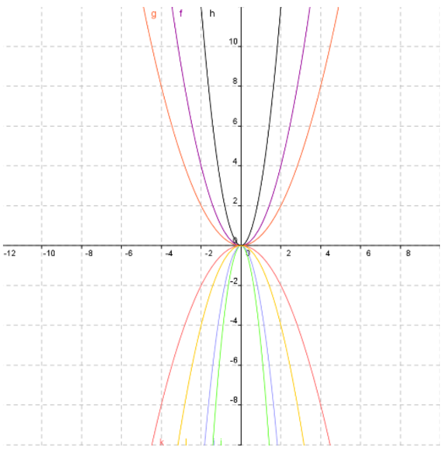
E2: Obtenemos dos valores porque la pelota primero sube y después baja y pasa por la misma altura, por eso se relaciona el tiempo y la altura. La curva va hacia abajo. Si queda más o menos lo mismo, algunos puntos coinciden cuando la doblamos la hoja.

E 3: Podemos obtener dos valores distintos en el eje "x" y un solo valor en "y" porque la pelota sube y baja. La función es una curva y si doblas la hoja al medio serían los mismos valores

La conclusión a la que arribaron es que si doblamos a la mitad la hoja se obtiene la misma gráfica de ambos lados, esto se definió como simetría simetría, pudieron identificar una línea imaginaria, que se forma en la hoja cuando la doblamos y definimos como eje de simetría. A partir de ese eje se identificaron puntos de simetría, en las actividades anterior los podemos ver cuando preguntamos ¿Alcanza la pelotita los 5m de altura? ¿En qué momento? Las parábolas siempre son simétricas respecto a una recta vertical llamada eje de simetría.

Una vez terminada esta actividad analizamos si se adapta a alguno de los modelos matemáticos que ya vimos.

Actividad 1 Utilizando el programa Geo-Gebra, grafiquen las siguientes funciones en mismo gráfico:



a. $F(x) = x^2$ b. $G(x) = \frac{1}{2}x^2$ c. $H(x) = 3x^2$

d. $I(x) = -5x^2$ e. $J(x) = -3x^2$ f. $k(x) = -\frac{1}{2}x^2$

g. $L(x) = -x^2$

¿En que se parecen las funciones?

E1: Se parecen a que todas son curvas y todas pasan por al ordenada al origen en cero.

E2: Se parecen que son curvas, todas pasan por la ordenada la origen y ninguna por la raíz. Todas vienen y van desde y hacia el infinito.

¿Qué diferencia hay entre las gráficas F(x) y L(x)?

E1: F(x) es positiva y L(x) es negativo.

E2: F(x) está arriba del eje “x” y L(x) esta abajo del eje x.

¿Y G(x) con K(x)?

Igual a la pregunta anterior.

¿Y en que influye ese cambio en el gráfico? ¿Por qué una de las gráficas está arriba y la otra abajo del eje x? ¿Influye en algo que este el 3 antes de la x^2 en la función H(x)?

E1: Influye que es más chica que F(x) y G(x) va más cerca del eje y.

E2: Es positiva, es menos curva que las demás funciones y que está más cerca del eje y.

E3: Abarca más números en el eje x que la otra gráfica.

¿Y el -5 en la función I(x)?

E1: Influye en las misma, la función es más chica y está más cerca del eje y.

E2: Es negativa y está más cerca del eje y negativo. Es la función más chica de todas.

E3: Es lo mismo que H(x), nada más que negativo y más cerca del eje y.

Entonces ¿Qué conclusión podemos sacar? Sí ahora tenemos la función $8x^2$ ¿va a estar más cerca del eje y? ¿y si tomo $20x^2$? ¿Y si tomo $0{,}5x^2$? ¿Y 0,25 x^2? ¿Qué pasa con los números que son muy grandes, como es el comportamiento de la gráfica? ¿Y de los números muy chicos?

Aquí realizamos una puesta en común tratando de analizar el comportamiento del parámetro “a” sin saber todavía que es un parámetro.

Cuando el coeficiente principal tiene valor positivo, las ramas de la parábola se abren hacia arriba.

Cuando el coeficiente principal tiene valor negativo, las ramas de la parábola se abren hacia abajo.

Cuanto más grande sea el coeficiente principal positivo, la parábola se acerca más a eje Y.

De la misma manera, cuánto más chico sea el valor del coeficiente principal positivo, la parábola se acerca más al eje X.

En el pizarrón institucionalizamos de la siguiente forma:

Podemos ver que la función de la forma $y = ax^2$ varía según la modificación de los parámetros de a.

Si $a > 0$ ⟶ Las ramas de la parábola van hacia arriba. (Cóncava hacia arriba)

Si $a < 0$ ⟶ Las ramas de la parábola van hacia abajo. (Cóncava hacia abajo)

Si $0 < |a| < 1$ ⟶ La parábola se abre.

Si $|a| > 1$ ⟶ La parábola se cierra.

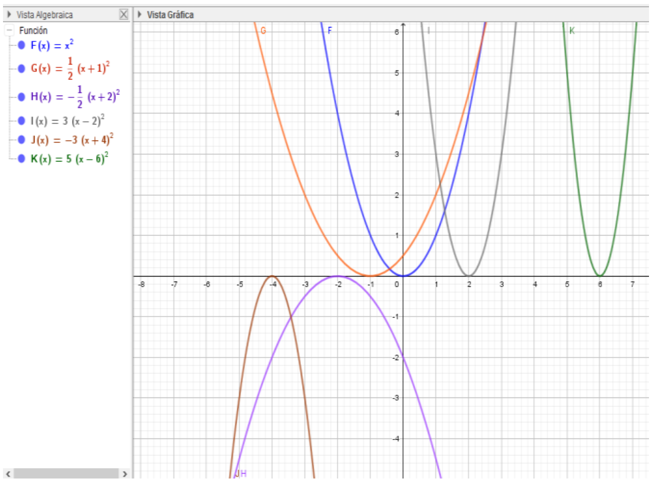
Actividad 2 Utilizando el programa Geo-Gebra, grafiquen las siguientes funciones en mismo gráfico:

a) $F(x) = x^2$ b) $G(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$

c) $H(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2$ d) $I(x) = 3(x-2)^2$

e) $J(x) = -3(x+4)^2$

f) $K(x) = 5(x-6)^2$



1. ¿Qué funciones tienen un mínimo? ¿Cuál es ese mínimo? (Dar las coordenadas del punto) ¿Cuál es el eje de simetría?

E1: Las funciones F, G, I y K tienen un mínimo. En la función F el mínimo es (0; 0) y el eje de simetría es 0, en la función G el mínimo es (-1; 0) y el eje de simetría es -1, en la función I el mínimo es (2; 0) y el eje de simetría es 2, en la función I el mínimo es (6; 0) y el eje de simetría es 6.

2. ¿Qué funciones tienen un máximo? ¿Cuál es ese máximo? (Dar las coordenadas del punto) ¿Cuál es el eje de simetría?

E1: Las funciones J y H tienen un máximo. En la función J el máximo es (-4; 0) y el eje de simetría es -4, en la función H el máximo es (-2; 0) y el eje de simetría es -2

3. Mirando solo la formula ¿Podemos obtener los datos anteriores?

E1: Con el signo del coeficiente principal podemos ver si va arriba o abajo del eje “x”, después con el número que está dentro del paréntesis es donde pasa por el eje “x”. El eje de simetría es el mismo que la raíz.

E2: El número que está adentro del paréntesis con el signo cambiado es el que corta en el eje “x”. Todos los máximos y mínimos pasan por el 0 en el eje “y”, pero eso no lo vemos en la formula dada.

E3: La raíz coincide con el eje de simetría, la raíz y el valor dentro de la formula con el signo cambiado.

En una puesta en común vamos analizar estas consignas para llegar a estas conclusiones e institucionalizar en el pizarrón:

Ahora si miramos la siguiente expresión $a(x-h)^2$ vamos a sacar algunas conclusiones: Si h es negativo vemos que la gráfica se traslada hacia la derecha la cantidad de veces que nos dice el valor de h. Si h es positivo, la gráfica se traslada hacia la izquierda la cantidad de veces que dice el valor h.

Si analizamos el papel de los máximos y los mínimos podemos ver que la abscisa del mínimo coincide con la raíz de la función. La ordenada del mínimo es siempre el valor opuesto al valor que nos da h, por lo tanto, la raíz también tendrá el signo opuesto.

Actividad 3 Utilizando el programa Geo-Gebra, grafiquen las siguientes funciones en mismo gráfico:

a) $F(x) = x^2$

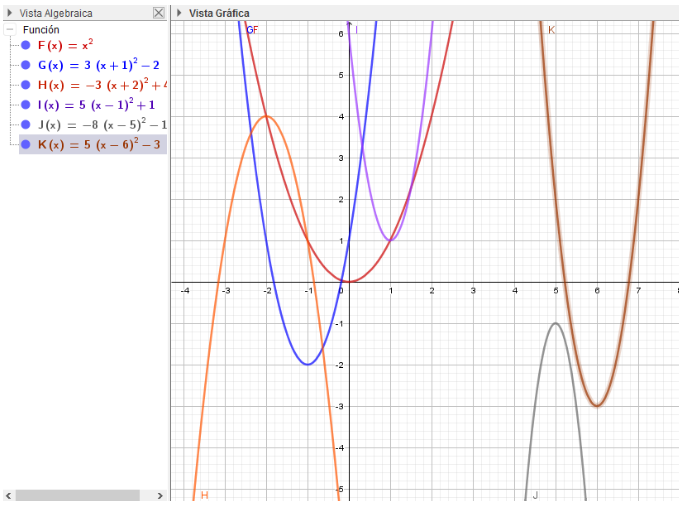
b) $G(x) = 3(x+1)^2 - 2$

c)$H(x) = -3(x+2)^2 + 4$

d) $I(x) = 5(x-1)^2$+1

e) $J(x) = -8(x-5)^2 - 1$

f)$K(x) = 5(x-6)^2 - 3$



Mirando el gráfico responder:

1. ¿Qué funciones tienen un mínimo? ¿Cuál es ese mínimo? (Dar las coordenadas del punto) ¿Cuál es el eje de simetría?

E1: Las funciones F, G y K tienen un mínimo. En la función F el mínimo es (0; 0) y el eje de simetría es 0, en la función G el mínimo es (-1; -2) y el eje de simetría es -1, en la función K el mínimo es (6; -3) y el eje de simetría es 6.

2. ¿Qué funciones tienen un máximo? ¿Cuál es ese máximo? (Dar las coordenadas del punto) ¿Cuál es el eje de simetría?

E1: Las funciones H, I y J tienen un máximo. En la función H el máximo es (-2; 4) y el eje de simetría es -2, en la función I el máximo es (1; 1) y el eje de simetría es 1 y en la función J el máximo es (5; -1) y el eje de simetría es 5.

3. Mirando solo la formula ¿Podemos obtener los datos anteriores?

E1: El valor que está dentro del paréntesis y el que está afuera del paréntesis sumando o restando son los que forman el máximo o mínimo.

E2: El número que está adentro del paréntesis con el signo cambiado es el que corta en el eje “x” y el que está afuera sumando o restando es el que representa al eje “y”.

E3: El número que está sumando o restando a fuera del paréntesis es lo que se corre para los costados en el eje y.

Aquí hicimos la puesta en común con los chicos dando a conocer sus posibles respuestas y las conclusiones a las que llegan.

¿Influye en algo que este restando el número 3 después del término cuadrático x^2 en la función H(x)? ¿Y el -2 en la función G(x)? ¿Y el 1 en la función I(x)?

Considerando la siguiente expresión analítica se pueden obtener ciertas conclusiones: $a(x-h)^2+c$

La coordenada “x”, coincide con el valor de h cambiado de signo, mientras que la coordenada “y” coincide con el valor de c. El valor de c indica cuánto se desplaza la función sobre el eje “y”.
Estos dos nuevos valores que ya conocemos el con máximo o mínimo de la función también lo llamaremos vértice, siendo h el x del vértice y siendo c él y del vértice.

Si $c=0$ $\longrightarrow$ la función tiene una sola raíz que será doble.
Si $c>0$ $\longrightarrow$ La grafica se desplaza hacia arriba. Con respecto al eje y.

Si $c<0$ $\longrightarrow$ La grafica se desplaza hacia abajo. Con respecto al eje y.

Luego se institucionalizao utilizando un método funcional, es decir, vamos a comenzar a utilizar expresiones y escrituras algebraicas vinculadas a la función cuadrática, dando nombre y analizando el comportamiento de cada parámetro.

Cierre de la clase:

Institucionalización:

La función cuadrática puede ser expresada mediante el cuadrado de un binomio de la siguiente manera:

$$F(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$$

Siendo “a” el coeficiente principal y el par ordenado (x_v, y_v) las coordenadas del vértice de la parábola.

Como vimos hasta ahora la representación gráfica de una función cuadrática es una parábola.

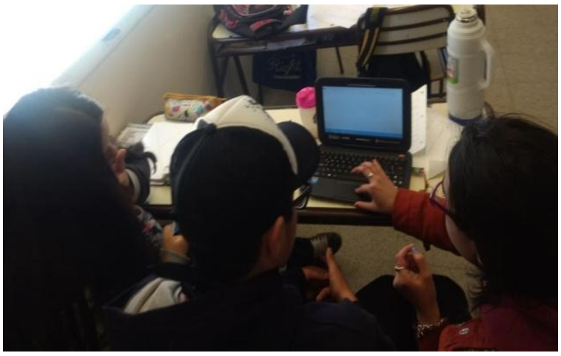
Conclusión de la propuesta:

Al comenzar el curso, se nos propuso llevar al aula una actividad que permita a los alumnos analizar un problema extramatemático para poder construir o fortalecer conceptos de la matemática. En mi experiencia, lo habitual es exponer las nociones y realizar un análisis para concluir sus regularidades. En otras situaciones, comencé a analizar los distintos valores de los parámetros de una función cuadrática con un *software* graficador para, posteriormente, interpretar y deducir conjeturas de estos.

Este Ateneo me propuso un desafío personal, ya que comenzó como una experiencia innovadora. Pude interpretar y reflexionar sobre las producciones de mis alumnos, logré darle sentido y connotación a lo matemático desde una actividad de la vida cotidiana.

Mi propuesta consistió en el lanzamiento de un objeto (tiro vertical). La situación presentada permitió que los alumnos pudieron construir el concepto de función cuadrática. No solo lo construyeron, sino que también pudieron comparar y diferenciar de los modelos lineales. En otras palabras, lo convencional es comenzar con la función cuadrática en su forma polinómica, pero logramos construir, con los alumnos, el punto máximo como vértice de la parábola, concretando así que la forma canónica se adapta a esta situación. Además, el concepto de simetría de cada punto fue identificado en una primera instancia de la experiencia, que luego permitió ser trasladado a la gráfica de la parábola.

El interés que demostraron a lo largo de estas clases, superó mis expectativas. Y más aún, supero las expectativas de los alumnos, el hecho de “hacer matemática”.



Alumnos de 4 TM Colegio Secundario Toay Viendo el video de la pelotita y resolviendo consignas